Vályi Gyula Matematika Kör V. osztály, 2018. február 23.

A feladatokat válogatta és a köri tevékenységet irányította: Biró Imre Levente

Közönséges törtek. Műveletek:

1. Mutassátok ki, hogy az $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 70 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{70}\right)$ természetes szám, és igazold, hogy osztható71-el.
2. Számítsd ki: *a)* $\frac{1+2+3+\ldots+100}{2+4+6+\ldots+200}$; *b)* $\frac{1+2+3+\ldots+100}{101+102+103+\ldots+200}$; *c)* $\frac{1+3+5+\ldots+99}{2+4+6+\ldots+100}$
3. Számítsátok ki a + b értékét, ha a = $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2018}$ és b = $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots + \frac{2017}{2018}$.
4. Igazoljátok, hogy $\frac{5}{6} < \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{30} < 5$
5. Igazoljátok, hogy bármely n természetes szám esetén érvényes: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ és $\frac{1}{n \cdot (n+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)$

   Számítsátok ki: a) $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \frac{1}{132}$

   b) $\frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \frac{1}{108} + \ldots + \frac{1}{1188} =$
6. Írjátok fel a $\frac{100}{101}$ törtet 100 db tört összegeként, ha a törtek számlálója 1 és nevezőik különböznek.
7. Igazoljátok, hogy $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2012^2} < 2.$
8. Igazoljátok, hogy ha $\frac{x}{y} + \frac{x+1}{y+1} + \frac{x+2}{y+2} + \ldots + \frac{x+2011}{y+2011} = 2012$ akkor x = y!
9. Ha a, b, c természetes szám esetén : $\frac{2014}{a+1} + \frac{2014}{b+2} + \frac{2014}{c+3} = 2014,$ számítsátok ki $\frac{a+2}{a+1} + \frac{b+3}{b+2} + \frac{c+4}{c+3}.$
10. Igazoljátok, hogy $a = \frac{15}{13} + \frac{1515}{1313} + \frac{151\,515}{131\,313} + \ldots + \underbrace{\frac{151\,515\ldots15}{131\,313\ldots13}}_{\text{26 db számjegy}}$ természetes szám!
11. Ha $A = \frac{165}{231}$, akkor A, 2A, 3A, 4A, … , 2018A számok között hány természetes szám van?
12. a) Számítsátok ki: $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot \ldots \cdot 1\frac{1}{1000}$

    b) Mutassuk ki, hogy: $A = (2 + 4 + 6 + \cdots + 4026) \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2013 \cdot 2014}\right)$ teljes négyzet!

    c) Határozzuk meg az n természetes számot, ha: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+2)} = \frac{1002}{2005}$
13. Számítsátok ki az a és b számok számtani közepét, ahol:

    a) $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2011}$ és $b = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{2010}{2011}$

    b) $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2011 \cdot 2012}$ és $b = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2012}\right)$
14. Számítsátok ki, ha a és b nem nulla számok:

    a) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\overline{aa}}\right) : \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\overline{bb}}\right)$; *b)* $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\overline{aa}} + \frac{1}{\overline{aaa}}\right) : \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\overline{bb}} + \frac{1}{\overline{bbb}}\right)$;

    c) $\left(\frac{1}{\overline{ab}} - \frac{1}{\overline{abab}}\right) : \left(\frac{1}{\overline{ba}} - \frac{1}{\overline{baba}}\right)$; *d)* $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\overline{aa}} + \frac{1}{\overline{aaa}}\right) : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\overline{bb}} + \frac{1}{\overline{bbb}}\right)$.

15. Mutassátok ki, hogy igazak a következő egyenlőtlenségek:

a) $\frac{25}{2\cdot 7}+\frac{25}{7\cdot 12}+\frac{25}{12\cdot 17}+\ldots+\frac{25}{47\cdot 52}<3$ b) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{50^2}<\frac{49}{50}$

c) $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{29^2}>0,3$ d) $\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{90}>\frac{8}{9}$

16. Számítsátok ki:

a) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2015}\right)$ b) $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+2015}$

c) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{33}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{33\ldots3}_{10}}\right):\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{55}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{55\ldots5}_{10}}\right)$

17. Mutassátok ki, hogy az alábbi szám egy teljes köb:

$$N=\frac{8000}{19}\cdot\left(\frac{1}{1+2+3+\ldots+100}+\frac{1}{1+2+3+\ldots+101}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+1999}\right)$$

18. Számítsátok ki :

$$N=\frac{9\cdot 3\cdot 300}{\left(\frac{1}{1+2+\ldots+100}+\frac{1}{1+2+\ldots+101}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+999}\right)\cdot 90000}$$

19. Hasonlítsátok össze az A és $\frac{1}{B}$ számokat, ahol:

$A=\frac{1}{9}-\frac{8}{9^2}-\frac{8}{9^3}-\ldots-\frac{8}{9^{2004}}$ és $B=\frac{1+2+2^2+\ldots+2^{6012}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{6012}}}$

20. Legyen $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{100}}$. Igazoljátok, hogy $S<\frac{1}{2}$.

21. Legyen $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2006}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{2005}{2006}$

és $B=\frac{12}{48}+\frac{102}{408}+\frac{1002}{4008}+\frac{10002}{40008}$ Számítsátok ki: $A-B$ și B^A.

22. Mutassátok ki, hogy igazak a következő egyenlőtlenségek:

a) $\frac{1}{2^2}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^2}+\ldots+\frac{63}{64^2}<6$; b) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{2006^2}<\frac{2005}{4012}$;

c) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{2010^2}<\frac{2009}{4020}$.